4. Teste de comparação no limite

Lembrete 4.0.1 — Teste de comparação. Seja $0 \le x_n \le y_n$ para todo $n \ge p$, logo
1) $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge.

4.1 Teste de comparação no limite (TCL)

■ **Exemplo 4.1** Dada série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$. Sabemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge sendo série harmônica. Mas não podemos aplicar o Teste de comparação diretamente para concluir que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ converge desde que

$$\frac{1}{n^2-1} > \frac{1}{n^2}.$$

De outro lado "a ordem do decaimento" dos termos de duas series é igual quando $n \to \infty$. Ou seja pode aplicar-se o Teorema em baixo.

Teorema 4.1.1 — Teste de comparação no limite. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ tais que $x_n > 0$, $y_n > 0$. Suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. Logo
1) Se $L > 0$, então $[\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge$]$.
2) Se $L = \infty$, então $[\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge$]$.
3) Se $L = 0$, então $[\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge$]$.

Demonstração. 1) Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L > 0$. Pela definição do limite, para $\varepsilon = \frac{L}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - L\right| < \frac{L}{2}, n > n_0,$$

então
$$-\frac{L}{2} < \frac{x_n}{y_n} - L < \frac{L}{2},$$
Portanto
$$\frac{L}{2} y_n < x_n < \frac{3L}{2} y_n,$$
isto é $\frac{L}{2} y_n < x_n$, e $x_n < \frac{3L}{2} y_n$. Agora aplicando Teste de comparação com $n > \max\{n_0, p\}$ obtemos que [$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge], e [$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge]. Portanto a propriedade 1) é verdadeira.

2) Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L = \infty$. Pela definição do limite $L = \infty$, para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_n}{y_n} > 1$, $n > n_0$. Assim $x_n > y_n$ e 2) segue pelo Teste de comparação.

3) Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$. Logo para $\varepsilon = 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_n}{y_n} < 1$, $n > n_0$, assim $x_n < y_n$ e pelo Teste de comparação 3) é verdadeira. ■

■ **Exemplo 4.2** 1) Estude a convergência: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$.

Solução. Seja $y_n = \frac{1}{2^n}$, então
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} = 1.$$
Assim pelo (TCL) temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converge desde que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge. ;-)

2) Estude a convergência: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 + 4n}{\sqrt[3]{5n + n^{13}}}$.

Solução. $3n^4$ é "dominante" de nominador, e $n^{\frac{13}{3}}$ é "dominante" de denominador. Seja $y_n = \frac{3n^4}{n^{\frac{13}{3}}} = 3n^{-\frac{1}{3}}$. Então
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 + 4n}{\sqrt[3]{5n + n^{13}}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{3}}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^{\frac{13}{3}} + 4n^{\frac{4}{3}}}{3\sqrt[3]{5n + n^{13}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + 4n^{-\frac{9}{3}}}{3 \cdot \sqrt[3]{5n^{-12} + 1}} = 1$$
Como $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge, pelo (TCL) série inicial diverge. ;-)

3) Estude a convergência: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

Solução. Seja $y_n = \frac{1}{n}$. Assim
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, logo pelo (TCL) série inicial diverge. ;-)

4) Estude a convergência: $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^2}$.

Solução. Seja $y_n = \dfrac{1}{n}$. Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\ln n)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(\ln x)^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2}.$$

Agora aplicando regra de L'Hôpital temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \infty.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, pelo (TCL) série inicial diverge. ;-)

5) Estude a convergência: $\sum_{n=1}^{\infty} n(1-\cos\frac{1}{n})$.

Solução. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} n(1-\cos\frac{1}{n}) = \lim_{x\to\infty} x(1-\cos\frac{1}{x}) = |\frac{1}{x} = y, y \to 0| = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{1} = 0.$$

Então a série pode ser convergente. Seja $y_n = \dfrac{1}{n^p}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^{p+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{(p+1)x^p}$$
$$= \frac{1}{p+1} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{1}{x^{p-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2},\ p=1 \\ 0,\ 0<p<1 \\ \infty,\ p>1. \end{cases}$$

Em particular, se $p=1$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, logo pelo (TCL) a série inicial diverge. ;-)

4.2 Teste de razão

Seja $t>0$. Sabemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ converge se $0<t<1$ e diverge se $t \geq 1$.

Teorema 4.2.1 — Teste de razão. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ com $x_n > 0$, $n \geq p$. Suponha que existe o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L$, então

1) $0 \leq L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.
2) $L > 1$ (ou ∞) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.
3) $L = 1 \Rightarrow$ não podemos concluir nada.

Proof. 1) Seja $t > 0$ tal que $L < t < 1$. Pela definição do limite existe $n_0 \geq p$ tal que

$$z_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} < t, \quad n \geq n_0,$$

logo $x_{n+1} < tx_n$ para todo $n \geq n_0$, ou seja

$$\begin{aligned} & x_{n_0+1} < tx_{n_0} \\ & x_{n_0+2} < tx_{n_0+1} < t^2 x_{n_0} \\ & \quad \dots \\ & x_{n_0+k} < t^k x_{n_0} \end{aligned}$$

Consideremos $a_k = x_{n_0+k}$ e $b_k = t^k x_{n_0}$, $k \geq 1$. Temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} t^k x_{n_0} = \frac{x_{n_0} t}{1-t},$$

ou $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ converge. Desde que $a_k < b_k$, pelo (TC) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} x_k$ converge. Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge também.

2) Se $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to L > 1$ (ou ∞), existe $n_0 \geq p$ tal que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1, n \geq n_0,$$

ou seja $x_{n+1} > x_n$ e $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$. Portanto a série diverge (pelo Teste do termo geral).

3) Consideremos 2 exemplos: Para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} = \frac{\frac{1}{(n+1)2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} = 1,$$

e sabemos que a série converge. Por outro lado, para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

e sabemos que a série diverge. Assim, caso $L = 1$ não é informativo. ■

Corolario 4.2.2 Seja $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ e $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $n \geq n_0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

■ **Exemplo 4.3** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot (1+\frac{1}{n})^{10} = \frac{1}{3}.$$

Então pelo Teste de razão série converge.

■ **Exemplo 4.4** Seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} a^n$, com $a > 0$.

Solução.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!a^n}\right] = a \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n}$$
$$= a \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = a \cdot \frac{1}{e}.$$

Pelo Teste de razão, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} a^n : \begin{cases} \text{converge se } \frac{a}{e} < 1, \\ \text{diverge se } \frac{a}{e} > 1. \end{cases}$$

Agora vamos analisar o caso $\frac{a}{e} = 1$ ou $a = e$. Neste caso $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n e$. Nossa ideia é usar o Corolário 4.2.2. Primeiro mostremos que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, $n \geq n_0$. Seja $y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$. Assim

$$y_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

Pela definição do e, $\{y_n\}$ cresce para e, portanto

$$\frac{1}{y_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

decresce para $\frac{1}{e}$, ou seja a sequência

$$\frac{e}{y_n} = e \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

decresce para 1, logo temos

$$\frac{e}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1, \ n \geq 1.$$

Pelo Corolário 4.2.2 a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ diverge, portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} a^n : \begin{cases} \text{converge se } \frac{a}{e} < 1, \\ \text{diverge se } \frac{a}{e} \geq 1. \end{cases}$$

;-)

■ **Exemplo 4.5** Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2|x|)^n}{n\ln(n+1)}$. Para quais valores de x série converge?

Solução. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2|x|)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+2)} \cdot \frac{n\ln(n+1)}{(2|x|)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot |x| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot |x| \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}.$$

Por outro lado (usando a regra do l'Hôpital) temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Portanto $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 2|x|$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2|x|)^n}{n\ln(n+1)} : \begin{cases}\text{converge se } 2|x|<1,\\ \text{diverge se } 2|x|>1.\end{cases}$$

Agora vamos analisar o caso $2|x| = 1$ ou $x = \pm\dfrac{1}{2}$. Neste caso temos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}.$$

É fácil ver que

$$\frac{1}{n\ln(n+1)} > \frac{1}{n\ln(n^2)},\ n\geq 2$$

A série$\sum_2^\infty \dfrac{1}{n\ln(n^2)} = \frac{1}{2}\sum_2^\infty \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge pelo Teste de integral. De fato,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x\Big|_2^b = \infty.$$

Assim, pelo (TC) $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n\ln(n+1)}$ diverge. Resumindo tudo, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2|x|)^n}{n\ln(n+1)} : \begin{cases}\text{converge se } -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2},\\ \text{diverge se } x\geq\frac{1}{2}, x\leq-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

;-)